

3 Divisibilidad

1. Múltiplos de un número

Los **múltiplos** del número 2 son:

$$2 \cdot 1 = 2; 2 \cdot 2 = 4; 2 \cdot 3 = 6; 2 \cdot 4 = 8; 2 \cdot 5 = 10; 2 \cdot 6 = 12; \dots$$

$$M(2) = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

- ▶ Observa que se multiplica el 2 sucesivamente por 1, 2, 3, 4, 5, ...
- ▶ Los **múltiplos** de un **número** se obtienen **multiplicando** ese número **por** los **números naturales**. Por eso hay infinitos múltiplos de un número, tantos como números naturales.

1. Completa esta tabla con los 10 primeros múltiplos de los números de la primera columna:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4					14			
3	3	6								
4										
5						30				
6										
7										
9			27							
11							77			
13			39							
20										

2. Escribe tres múltiplos de los siguientes números:

a) 47: _____ c) 100: _____

b) 51: _____ d) 214: _____

3. De entre estos números señala los que son múltiplos de 9:

12, 27, 40, 42, 45, 60, 63, 90, 100

4. Escribe:

a) Los múltiplos de 7 menores que 50. _____

b) Los múltiplos de 5 menores que 50. _____

c) Los múltiplos de 3 entre 30 y 40. _____

d) Los múltiplos de 4 mayores que 10 y menores que 30. _____

2. Divisores de un número

Veamos que 4 es **divisor** de 20.

Dividimos 20 entre 4:

$$\begin{array}{r} 20 \\ 4 \overline{) 20} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$
 Como la división es exacta, es decir, el resto es 0, entonces, **4 es divisor de 20,**
 y **20 es divisible por 4.**

- ▶ Fíjate en que 4 divide exactamente a 20 en 5 partes. Luego, **4 es divisor de 20.**
- ▶ Observa que 20 tiene más divisores: 1, 2, 5 y 20. Los divisores de 20 son: $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
- ▶ Un número es **divisor** de otro si lo divide exactamente, es decir, si el resto de la división de uno entre otro es 0.
- ▶ Recuerda que $D = d \cdot c + r$.
 Si el resto, r , es 0, la división se llama exacta y $D = d \cdot c$. En nuestro caso, $20 = 4 \cdot 5 + 0$.
 Fíjate en que si $20 = 4 \cdot 5 + 0 = 4 \cdot 5$, entonces **20 es múltiplo de 4.**

5. Averigua si los siguientes números son divisores de 15:

a) 10

c) 7

b) 5

d) 3

6. Indica si son verdaderas, V, o falsas, F, estas afirmaciones y justifica tu respuesta:

a) 181 es múltiplo de 14.

c) 195 es múltiplo de 13.

b) 18 es divisor de 54.

d) 9 es divisor de 48.

7. Completa la tabla y escribe a continuación los divisores del 8:

	8 : 1	8 : 2	8 : 3	8 : 4	8 : 5	8 : 6	8 : 7	8 : 8
Cociente								
Resto								

Ten en cuenta que **1 es divisor de todos** los números y que **todo número es divisor** (y múltiplo) de sí mismo.

$D(8) =$ _____

3. Criterios de divisibilidad

¿El número 12 es **divisible** por 2? ¿Y por 3? ¿Y por 5? ¿Y por 10?

- ▶ Un número es **divisible por 2** si es par: 12 es divisible por 2 porque es par.
- ▶ Un número es **divisible por 3** si el resultado de sumar todas sus cifras es múltiplo de 3, por ejemplo: 12 es divisible por 3 porque $1 + 2 = 3$, y 3 es múltiplo de 3.
- ▶ Un número es **divisible por 5** si acaba en 0 o en 5. Así, 12 no es divisible por 5 porque no acaba ni en 0 ni en 5.
- ▶ Un número es **divisible por 10** si acaba en 0.

8. Entre los siguientes números señala los que sean divisibles por 2:

4	7	10	21	32	47	52	103	781	896
---	---	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

9. Indica cuáles de estos números son divisibles por 3:

8	21	78	128	761	1204	3921	4021	1002	10224
---	----	----	-----	-----	------	------	------	------	-------

10. Marca los números que son divisibles por 5:

40	100	234	71	32	47	50	1000	45	896
----	-----	-----	----	----	----	----	------	----	-----

11. Señala entre estos números los que son divisibles por 10:

14	70	100	21	322	470	1000	103	12	1240
----	----	-----	----	-----	-----	------	-----	----	------

12. Escribe los números que cumplan las siguientes condiciones:

- a) Un número divisible por 3 y que tenga cuatro cifras.
- b) Tres números divisibles por 2 y por 3.
- c) Tres números divisibles por 3 y por 5.
- d) Un número que sea divisible por 2, 3, 5 y 10.

13. Indica si los siguientes números son divisibles por 2, 3, 5 o 10 y justifica por qué:

- a) 84
- b) 387
- c) 441
- d) 1 025
- e) 8 875 893 240

4. Números primos y compuestos

Vamos a clasificar los siguientes números en **primos** y **compuestos**:

4, 2, 7, 18, 21, 17

- ▶ Los divisores de **2, 7 y 17** son 1 y ellos mismos: son **números primos**.
- ▶ Los divisores de **4** son 1, 2 y 4: es un **número compuesto**.
- ▶ Los divisores de **18** son 1, 2, 3, 6, 9 y 18: es un **número compuesto**.
- ▶ Los divisores de **21** son 1, 3, 7 y 21: es un **número compuesto**.
- ▶ Los **números primos** son los que tienen como divisores el 1 y ellos mismos.
- ▶ Los **números compuestos** tienen además otros divisores diferentes de ellos mismos y de la unidad.

14. Indica si estos números son primos o compuestos. Justifica la respuesta.

- a) 19: _____
- b) 32: _____
- c) 59: _____
- d) 75: _____

15. Marca en la tabla los números primos:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

16. Escribe todos los números compuestos entre 111 y 120 y justifica tu respuesta.

5. Descomposición factorial

Vamos a **descomponer** el número **60** en **factores primos**:

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 & 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5
 \end{array}$$

- ▶ Como 60 es un número par, se divide primero entre 2. El resultado es 30.
- ▶ 30 también es par, por lo que lo dividimos de nuevo entre 2. El resultado es 15.
- ▶ 15 es múltiplo de 3, así que se divide entre 3 y sale 5.
- ▶ Por último, se divide 5 entre 5 y se obtiene como resultado 1.
- ▶ Observa que 60 puede expresarse como el producto de los factores primos obtenidos.
- ▶ Para **descomponer un número en factores primos**, lo dividimos tantas veces como haga falta por los números primos siguiendo el orden ascendente: 2, 3, 5, 7, 11, etcétera.

17. Descompón los siguientes números en factores primos y escríbelos como el producto de los factores obtenidos:

a) $35 =$

e) $2\,100 =$

i) $108 =$

b) $64 =$

f) $693 =$

j) $100 =$

c) $1\,000 =$

g) $343 =$

k) $15\,625 =$

d) $27 =$

h) $72 =$

l) $34\,969 =$

18. Calcula los números que corresponden a las siguientes descomposiciones factoriales:

a) $2 \cdot 3 \cdot 4 =$ _____

b) $2 \cdot 5 \cdot 7 =$ _____

c) $2^2 \cdot 5 =$ _____

d) $2^3 \cdot 13 =$ _____

e) $5 \cdot 7^3 =$ _____

f) $3^5 =$ _____

g) $5^3 \cdot 11 =$ _____

h) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 =$ _____

Cálculo de los divisores de un número a partir de su descomposición factorial

Vamos a calcular los **divisores** del número **12**:

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}
 \quad
 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

► Los divisores de 12 pueden hallarse siguiendo estos pasos:

- Primero, se eligen como divisores todos los factores primos obtenidos de la descomposición factorial del número: 1, 2 y 3. (No olvides que el 1 siempre es un divisor.)
- Después, se toman los productos de **dos** de los **tres factores**, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$.
- Por último, de los **tres factores**, $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

19. Calcula todos los divisores de los siguientes números, dados en forma de descomposición factorial, siguiendo el ejemplo:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

a) $2^2 \cdot 5 =$ _____

b) $2^3 \cdot 13 =$ _____

c) $3^2 \cdot 5 =$ _____

d) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 =$ _____

e) $3 \cdot 7^2 =$ _____

f) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 =$ _____

6. Cálculo del mínimo común múltiplo (m.c.m.)

Hallemos el **m.c.m.** de 90 y 24:

$$\left. \begin{array}{l} 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{m.c.m. (90, 24)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

► Para calcular el mínimo común múltiplo de 90 y de 24:

- Primero, se descomponen en factores primos los números 90 y 24.
- Después, de los **factores comunes**, 2 y 3, se eligen los que tengan **máximo exponente**; es decir, entre 2 y 2^3 , el 2^3 , y entre 3^2 y 3, el 3^2 .
- Por último, se halla el **m.c.m.**, que es el **producto** de los **factores comunes elevados al máximo exponente por los factores no comunes**: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

► El **m.c.m.** de varios números es el **menor** de los **múltiplos** comunes de esos números.

20. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 24 y 50

c) 20 y 15

b) 16 y 6

d) 30 y 45

21. Escribe los diez primeros múltiplos de estos números e indica su mínimo común múltiplo:

a)

2	2	4	6							20
3	3	6								

m.c.m. (2, 3) = _____

b)

8									72	
10								80	90	100

m.c.m. (8, 10) = _____

22. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 63, 27 y 36

b) 75, 30 y 18

7. Cálculo del máximo común divisor (M.C.D.)

Calculemos el **M.C.D.** de **90** y **24**:

$$\left. \begin{array}{l} 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 24 = 2^3 \cdot 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{M.C.D. (90, 24)} = 2 \cdot 3 = 6$$

- ▶ Para calcular el máximo común divisor de 90 y 24:
 - Primero, se descomponen en factores primos los números 90 y 24.
 - Después, de los **factores comunes**, 2 y 3, se eligen los que tengan **mínimo exponente**, es decir, entre 2 y 2^3 , el 2, y entre 3^2 y 3, el 3.
 - Por último, se establece el **M.C.D.**, que es el **producto** de los **factores comunes elevados al mínimo exponente**: $2 \cdot 3$
- ▶ El **M.C.D.** de varios números es el mayor de los **divisores comunes** de esos números.

23. Calcula el M.C.D. de estos números:

a) 24 y 50

c) 20 y 15

b) 16 y 6

d) 30 y 45

24. Escribe todos los divisores de los siguientes números e indica su M.C.D.:

a) 6 y 20

b) 12 y 18

25. Calcula el m.c.m. y el M.C.D. de estos números:

a) 63 y 27

b) 30 y 18

c) 220 y 143

8. Problemas

Lucas saca a pasear a su perro por el parque cada 2 días; Ana, cada 3, y Enrique, cada 5. Hoy han coincidido en el parque con sus perros. ¿Cuándo volverán a coincidir?

Veamos cada cuántos días van Lucas, Ana y Enrique al parque a partir de hoy:

Lucas: 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 **30**

Ana: 3 6 9 12 15 18 21 24 27 **30** 33 36 39 42 45

Enrique: 5 10 15 20 25 **30** 35 40 45 50 55 60 65 70 75

Volverán a coincidir dentro de 30 días.

- Observa que coincidirán en la primera fecha que sea **múltiplo común** de 2, 3 y 5, es decir, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Fíjate en que se trata del **m.c.m.**

- 26.** Rosa va a la biblioteca cada 2 días, y Elena, cada 3. Si han coincidido el domingo, ¿cuál es el siguiente día de la semana en que coincidirán?
- 27.** Un piloto va a Japón cada 15 días, otro va a cada 20 días y un tercero cada 18 días. Si coinciden hoy en Japón. ¿Cuándo volverán a coincidir?
- 28.** Una calle adornada con luces navideñas tiene bombillas de tres colores: amarillas, azules y verdes. Las amarillas parpadean cada 10 segundos, las azules cada 12 segundos y las verdes cada 20 segundos. Si en estos momentos parpadean las tres a la vez, averiguan cuándo volverán a hacerlo.
- 29.** Fernanda hace lentejas cada semana, Miguel cada 28 días y Juan cada 15 días. Si hoy han comido lentejas en sus casas, averigua cuántos días faltan para que vuelvan a coincidir.
- 30.** Con los libros que tenemos podemos colocarlos en las estanterías de 6 en 6 o de 8 en 8. Sabiendo que tenemos más de 90 libros y menos de 100, ¿cuántas baldas de 6 libros y cuántas de 8 libros se pueden hacer?

Ana tiene tres trozos de cuerda de 12 cm, 20 cm y 24 cm de longitud, respectivamente, y necesita dividirlos en trozos iguales y de la mayor medida posible. ¿Qué longitud deben tener esos trozos?

Veamos las diferentes longitudes que pueden tener los trozos en los que se dividen los tres trozos, que serán divisores de 12, 20 y 24:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow D(12) = \{1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 12\}$$

$$20 = 2^2 \cdot 5 = 20 \Rightarrow D(20) = \{1, 2, 5, \mathbf{4}, 10, 20\}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow D(24) = \{1, 2, 3, \mathbf{4}, 6, 8, 12, 24\}$$

Tenemos que hacer trozos de 4 cm, para dividir los tres trozos en partes iguales y de la mayor medida posible.

► La medida que coincide es un **divisor común** a 12, 20 y 24. Fíjate en que se trata del **M.C.D.**

- 31.** En un almacén de vino hay dos barricas, una de vino blanco de 18 L y otra de vino tinto de 24 L. Si queremos almacenarlas en garrafas iguales de capacidad máxima sin que sobre vino y sin mezclarlo, ¿qué capacidad tendrán las garrafas? ¿Cuántas garrafas necesitaremos?
- 32.** María decide adornar su árbol de Navidad colgando cuadrados de papel celofán. En la tienda le venden un pliego de 252 cm de largo por 90 cm de ancho. Si quiere que los cuadrados sean lo más grandes posibles, averigua cuánto medirán de lado.
- 33.** Un coleccionista decide comprar una serie de estanterías iguales para colocar sus colecciones de llaveros y chapas. Sabiendo que tiene 350 llaveros y 220 chapas y que quiere poner el mismo número de piezas en cada estantería, calcula el número de llaveros y de chapas que habrá de poner en cada estantería y cuántas estanterías necesitará.
- 34.** Para su cumpleaños, Juan decide regalar a sus primos una bolsa de golosinas de modo que en cada una haya el mismo número de gominolas, regaliz y caramelos. Sabiendo que tiene un paquete de 60 gominolas, otro con 315 barritas de regaliz y en el de caramelos vienen 495, calcula el número de golosinas que ha de poner en cada bolsita y cuántos primos tiene.

Evaluación

- Dados los números siguientes: 4, 20, 9, 15, 34
 - Escribe tres múltiplos de cada uno de ellos.
 - Averigua si son múltiplos de 5.

- Indica cuáles de los siguientes números son primos y cuáles compuestos: 17, 202, 71, 169 y 2 340. Haz la descomposición factorial de los compuestos.

- Calcula los divisores de los números siguientes a partir de su descomposición factorial: 147, 20, 110, 39 y 1 573

- Calcula el m.c.m. y el M.C.D. de los siguientes conjuntos de números:
 - 42, 280 y 490
 - 231, 847 y 3 465
 - 1 950, 15, 39 y 195

- Tomás lava las sábanas cada 8 días y Juana cada 10 días. Si hoy han coincidido tendiendo las sábanas en la terraza, calcula cuándo volverán a coincidir.

- En una lechería disponen de un depósito de leche de vaca de 1 200 litros y otro de leche de oveja de 800 litros. Quieren envasarlos en bidones de capacidad máxima sin que sobre nada y sin mezclarlas. ¿Qué capacidad tendrán los bidones? ¿Cuántos bidones van a necesitar?